9.2.12 Podmíněné pravděpodobnosti I

Předpoklady: 9207

Pedagogická poznámka: Podmíněné pravděpodobnosti se často vynechávají jako velmi těžké a nepochopitelné učivo. Moje zkušenosti ukazují, že situace není tak strašná a pro žáky ji ztěžuje zejména fakt, že se popisuje pomocí vzorců, které jim moc neříkají (i kvůli tomu, že používaná symbolika se v bezprostředně předcházejících hodinách příliš nepoužívala). Ve skutečnosti všechny vzorce odpovídají očekávání a selským rozumem jsou snadno přijatelné, jen je třeba dát pozor na skutečnost, že matematický formalismus na tomto místě situaci spíše komplikuje.

Př. 1: Předpokládej, že pravděpodobnost narození hocha i dívky je stejná 0,5. Jakými způsoby může být rozděleno pohlaví dětí v rodinách se třemi dětmi? Vypiš všechny možné výsledky. Urči pravděpodobnost jevů:
a) A: „v rodině mají dva kluky a jednu holku“;
b) B: „první dítě je kluk“;
c) C: „druhé a třetí dítě mají stejné pohlaví“;
d) D: „všechny děti jsou hoši“.
Rozhodni zda jsou jevy B a C nezávislé. Jsou nezávislé jevy A a B?

Podobnou situaci jsme již řešili. Sledujeme pohlaví dítěte i to, kolikáté se narodilo $\Rightarrow$ množinou všech výsledků budou uspořádané trojice z písmen h, d, kde první místo znamená pohlaví prvního dítěte, druhé místo pohlaví druhého, třetí místo třetího.

$$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(d,h,h),(h,d,d),(d,h,d),(d,d,h),(d,d,d)\}$$

a) Jev A: „v rodině mají dva kluky a jednu holku“

$$A = \{(h,h,d),(h,d,h),(d,h,h)\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8}$$

b) Jev B: „první dítě je kluk“

$$B = \{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(h,d,d)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

c) Jev C: „druhé a třetí dítě mají stejné pohlaví“

$$C = \{(h,h,h),(d,h,h),(h,d,d),(d,d,d)\} \Rightarrow P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

d) Jev D: „všechny děti jsou hoši“

$$D = \{(h,h,h)\} \Rightarrow P(D) = \frac{1}{8}$$

Pedagogická poznámka: Výpis všech možných výsledků je nutný kvůli orientaci a rychlému vyhledávání v další části hodiny. Stejně tak je dobré mít někde vypsány významy jednotlivých jevů.

Tři děti se většinou nerodí najednou, ale postupně. Jejich narození nemění pouze úroveň nepořádku a hluku v domácnosti, ale i pravděpodobnosti jevů.

Př. 2: Jako první dítě se narodí kluk. Jak se změní pravděpodobnosti jednotlivých výsledků z množiny Ω?

Všechny možné výsledky můžeme rozdělit do dvou skupin:

- $\{(d,h,h),(d,h,d),(d,d,h),(d,d,d)\}$ - výsledky, ve kterých se jako první narodí dívka. Jejich pravděpodobnost je nyní nulová.
- $\{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(h,d,d)\}$ - výsledky, ve kterých se jako první narodí hoch. Jejich pravděpodobnost je nyní $\frac{1}{4}$ místo $\frac{1}{8}$ (po narození hocha už mohou nastat pouze čtyři možné výsledky).

Matematicky říkáme:
V průběhu pokusu nastal jev *B* $\Rightarrow$ původní pravděpodobnosti $p(\omega)$ musíme nahradit „novými“ pravděpodobnostmi $p(\omega|B)$ - podmíněné pravděpodobnosti za podmínky *B*.
Platí:

- $p(\omega|B)=0$ pro $\omega \notin B$ (pravděpodobnosti výsledků z první skupiny s dívkou na začátku už jsou nulové),
- $p(\omega|B)=\frac{p(\omega)}{p(B)}$ pro $\omega \in B$ (pravděpodobnosti výsledků z druhé skupiny s hochem na začátku se zvětšily tolikrát, kolikrát se zmenšil počet možných výsledků. Kolikrát se zmenší počet možných výsledků, udává právě pravděpodobnost $P(B)$).

Kdyby platilo $P(B)=\frac{1}{3}$, nastáním jevu *B* by zmizely dvě třetiny možných výsledků $\Rightarrow$ pravděpodobnost zbývajících se musí zvětšit třikrát (vydělením jednou třetinou).

Co platí pro pravděpodobnost jevů?

Př. 3: Urči pravděpodobnost jevu *A* za podmínky *B* (první dítě je hoch).

Zbývají pouze čtyři možné výsledky: $\{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(h,d,d)\}$, z nichž dva $\{(h,h,d),(h,d,h)\}$ vyhovují jevu *A* $\Rightarrow$ $p(A|B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Pedagogická poznámka: Následující řešení je nesprávné, ale daleko častější, proto ho beru jako vhodný úvod do dalšího výkladu.

Předchozí příklad je možné "vyřešit" i jinak:
Napodobíme vztah pro výpočet změněné pravděpodobnosti možných výsledků:

$p(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{2\cdot 3}{8}=\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ takto získaný výsledek je nesprávný (vyšla větší pravděpodobnost, než když jsme sečetli změněné pravděpodobnosti zbývajících výsledků).
Kde se stala chyba?

Původní pravděpodobnost jevu $A=\{(h,h,d),(h,d,h),(d,h,h)\}$ byla $\frac{3}{8}$ (tři příznivé výsledky z osmi možných), jeden z těchto výsledků - (d,h,h) však už nemůže nastat (jako první se narodil hoch), je však stále započítán v původní hodnotě $P(A)$ $\Rightarrow$ nemůžeme vycházet z původní hodnoty $P(A)$ (obsahuje i nyní už nemožné výsledky), musíme započítat pouze výsledky, které jsou stále možné $\Rightarrow$ pouze výsledky příznivé jevům *A* i *B* $\Rightarrow$ výsledky odpovídající jevu $A\cap B$.

Ověříme postup:

- $A\cap B=\{(h,h,d),(h,d,h)\}$,
- $P(A\cap B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$,
- $p(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Zdá se, že jsme získali správný postup.

Pedagogická poznámka: S následujícím odvozením se příliš netrápím, snažím se, aby zbyl čas na další příklady. Výsledný vzorec je vcelku přirozený.

Nyní to samé obecně. Matematicky říkáme:

Podmíněná pravděpodobnost jevu *A* za podmínky *B* je definována (jak jsme zvyklí) jako součet pravděpodobností příznivých jevu *A*, tedy: $p(A|B)=\sum_{\omega\in A} p(\omega|B)$. Pokud se pokusíme vyjádřit pomocí původních pravděpodobností: $p(A|B)=\sum_{\omega\in A} p(\omega|B)=\sum_{\omega\in A\cap B}\frac{p(\omega)}{p(B)}$ (vzorec $p(\omega|B)=\frac{p(\omega)}{p(B)}$, můžeme započítat pouze takové výsledky, které jsou příznivé jevu *A* (ten nás zajímá) i jevu *B* (který víme, že nastal) $\Rightarrow$ proto píšeme $\omega\in A\cap B$ místo $\omega\in A$.

Platí $\sum_{\omega\in A\cap B} p(\omega)=P(A\cap B)$ $\Rightarrow$ $p(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Pro pokus se stejně pravděpodobnými výsledky pak platí: $P(A\cap B)=\frac{m(A\cap B)}{m}$, $P(B)=\frac{m(B)}{m}$ $\Rightarrow$ $p(A|B)=\frac{\frac{m(A\cap B)}{m}}{\frac{m(B)}{m}}=\frac{m(A\cap B)}{m(B)}$, kde $m(X)$ je počet výsledků příznivých jevu *X*.

Pravděpodobnost jevu *A* za podmínky *B* určíme pomocí vztahu $p(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, u pokusu se stejně pravděpodobnými výsledky pak pomocí vztahu $p(A|B)=\frac{m(A\cap B)}{m(B)}$.

Př. 4: Urči pomocí odvozeného vztahu pravděpodobnosti jevů C (druhé a třetí dítě mají stejné pohlaví) a jevu D (všechny děti jsou hoši) za podmínky B (první dítě je hoch).

a) jev *C* za podmínky *B*

Průnik jevů $C \cap B$: dva výsledky $\{(h,h,h),(h,d,d)\}$.

Jev B: čtyři výsledky: $\{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(h,d,d)\}$.

$p(C|B) = \dfrac{m(C \cap B)}{m(B)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ - pravděpodobnost jevu C se nezměnila.

b) jev *D* za podmínky *B*

Průnik jevů $D \cap B$: jeden výsledek $\{(h,h,h)\}$.

Jev B: čtyři výsledky: $\{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(h,d,d)\}$.

$p(D|B) = \dfrac{m(D \cap B)}{m(B)} = \dfrac{1}{4}$

Př. 5: Vysvětli, proč se pravděpodobnost jevu C nezměnila tím, že nastala podmínka B.

Jevy C a B jsou nezávislé $\Rightarrow$ jejich pravděpodobnosti by se neměly ovlivňovat.

Skutečnost, že pravděpodobnost jevů nezávislých se tím, že jeden z nich nastal, nemění, můžeme ukázat i pomocí vzorce.

$p(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, pro nezávislé jevy platí: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, dosadíme:

$p(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Př. 6: Házíme najednou bílou a modrou kostkou. Urči podmíněné pravděpodobnosti jevů:
a) $S = 7$ „součet je roven 7“; b) $S < 5$ „součet je menší než 5“;
c) $S > 8$ „součet je větší než 8“
za podmínky, že na modré kostce padlo číslo 4. Porovnej podmíněné pravděpodobnosti s původními pravděpodobnostmi těchto jevů.

Házíme dvě rozlišitelné kostky $\Rightarrow$ množinou všech možných výsledků jsou uspořádané dvojice sestavené z čísel 1 až 6.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6) \end{matrix} \right\} \Rightarrow 6^2 = 36 \text{ možností.}$$

Nejdříve určíme pravděpodobnost splnění podmínky $P(M4) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

a) $S = 7$ „součet je roven 7“ za podmínky na modré kostce padlo číslo 4

Součet je roven 7 a na modré padlo 4 $\Rightarrow$ jediná možnost $\Rightarrow$ $P(S=7\cap M4)=\frac{1}{36}$.

$$p(S=7|M4)=\frac{P(S=7\cap M4)}{P(M4)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}$$

Možné součty 7: $3+4=2+5=1+6$ $\Rightarrow$ šest možností $\Rightarrow$ $p(S=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Původní pravděpodobnost se padnutím 4 na modré kostce nezměnila.

b) $S<5$ **„součet je menší než 5“ za podmínky na modré kostce padlo číslo 4**

Součet je menší než 5 a na modré padlo 4 $\Rightarrow$ žádná možnost $\Rightarrow$ $P(S<5\cap M4)=0$.

$$p(S<5|M4)=\frac{P(S<5\cap M4)}{P(M4)}=\frac{0}{\frac{1}{6}}=0$$

Možné součty menší než 5: šest možností (v levém horním rohu) $\Rightarrow$ $p(S<5)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Původní pravděpodobnost se padnutím 4 na modré kostce zmenšila na nulu.

c) $S>8$ **„součet je větší než 8“ za podmínky na modré kostce padlo číslo 4**

Součet je větší než 8 a na modré padlo 4 $\Rightarrow$ 2 možnosti $\Rightarrow$ $P(S>8\cap M4)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

$$p(S>8|M4)=\frac{P(S>8\cap M4)}{P(M4)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}$$

Možné součty větší než 8: deset možností (v pravém dolním rohu) $\Rightarrow$ $p(S>8)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

Původní pravděpodobnost se padnutím 4 na modré kostce zvětšila z $\frac{5}{18}$ na $\frac{1}{3}=\frac{6}{18}$.

Př. 7: Házíme modrou a bílou kostkou. Urči pravděpodobnost, že na modré kostce padla dvojka, pokud víme, že součet je roven šesti.

Stejná množina jako v předchozím příkladu.

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6)\\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6)\\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6)\\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6)\\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6)\\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6)\end{Bmatrix} \Rightarrow 6^2=36 \text{ možností.}$$

Nejdříve určíme pravděpodobnost splnění podmínky $P(S=6)=\frac{5}{36}$.

Na modré padla dvojka a součet je roven 6 $\Rightarrow$ jediná možnost $\Rightarrow$ $P(M2\cap S=6)=\frac{1}{36}$.

$$p\left(M2\middle|S=6\right)=\frac{P\left(M2\cap S=6\right)}{P\left(S=6\right)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{1}{5}$$

Původní pravděpodobnost (na modré padne 2) se padnutím součtu 6 zvětšila z $\frac{1}{6}$ na $\frac{1}{5}$.

Př. 8: Ve skříni jsou tři zásuvky, v každé se nachází dvě stejné krabičky. V jedné zásuvce jsou v obou krabičkách bonbony, v další zásuvce je v jedné krabičce bonbon a v druhé lízátko, v poslední zásuvce jsou v obou krabičkách lízátka. Otevřeme jeden šuplík, vyndáme krabičku a zjistíme, že je v ní bonbon. Pokud se nám podaří uhádnout obsah druhé krabičky v otevřeném šuplíku, získáme výhru. Máme hádat bonbon nebo lízátko?

Prvotní úvaha: pokud byl v otevřené krabičce bonbon, určitě se nenacházíme v zásuvce s e dvěma lízátky $\Rightarrow$ buď jsou v naší zásuvce v obou krabičkách bonbony (druhý zbývá) nebo po otevření krabičky s bonbonem zůstává zavřená druhá s lízátkem $\Rightarrow$ obě možnosti jsou stejně pravděpodobné.
Předchozí úvaha je chybná.
Zjistíme, jaká je pravděpodobnost, že v naší zásuvce zbývá lízátko. Označíme si zásuvky čísly a krabičky rozlišíme na s Lízátkem a Bonbonem $\Rightarrow$ množina všech možných výsledků má šest prvků: $\Omega=\{(1;B_1),(1;B_2),(2;B),(2;L),(3;L_1),(3;L_2)\}$.
Podmínce „vytáhli jsme krabičku s bonbonem" vyhovují 3 možnosti:
$\Omega=\{(2;B),(1;B_1),(1;B_2)\} \Rightarrow P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.
Jev „vytáhli jsme krabičku s bonbonem a v druhé je lízátko": 1 možnost $(2;L) \Rightarrow$
$P(B\cap L)=\frac{1}{6}$.

$p\left(L\middle|B\right)=\frac{P\left(L\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3} \Rightarrow$ je pravděpodobnější, že zbývající krabička obsahuje bonbon $\Rightarrow$ je výhodnější hádat, že v krabičce je bonbon (máme tak dvakrát větší šanci na výhru).
Kde byla chyba v úvodní úvaze?
Pokud otevřeme jednu krabičku ve zvolené zásuvce a zjistíme, že je v ní bonbon, nacházíme se pravděpodobněji v zásuvce se dvěma bonbony (v této zásuvce totiž tímto způsobem dopadne otvírání první krabičky vždy) $\Rightarrow$ je pravděpodobnější, že v druhé krabičce je také bonbon.

Shrnutí: Pokud nastane jev B s pravděpodobností $P(B)$, zvyšuje se pravděpodobnost výsledků příznivých tomuto jevu $\frac{1}{P(B)}$ krát.